Title	Modular geometry of conformal field theory, KP equations and 2D gravity
Author(s)	清水, 勇二
Citation	数理解析研究所講究録 (1991), 756: 1-22
Issue Date	1991-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/82152
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
756巻 1991年 1-22

Modular geometry of conformal field theory, KP equations and 2D gravity

東北大·理 清水勇二

(超)弦理論((super-)string theory), 特に共形場理論(conformal field theory, 以下略して CFT)は, 数学にもいろいろ面白い素材, 問題を提供して来た。 この一年半ほどの間に, 2次元量子重力に関連して新しい発見がなされている。2次元重力は, 従来の弦理論の模型とは異なり, 非摂動論的な取り扱いが可能な model である。それが数学的に何を意味するかはこれからの問題であるが, いろいろな進展が最近あるようである。

この小論においては, 2次元重力の model の紹介を試みる。matrix model 自体, 歴史的にかなり昔に源があり, それを十分消化していない点等をお詫びしておく。なお, これは数理研での研究集会の際, 話そうとした内容のまとめであるので, 最初に CFT に関する Review もつけ加わっている。

§1　共形場理論（CFT）：A review

1.1　CFTは共形不変な２次元の場の理論を指す。CFTに数学者に納得のいく定義を与えるのは難しいことであるが，現在多数の人が合意すると思われるCFTの"定義"を以下与えてみようと思う。

２次元の(局所)共形変換の全体は無限次元の群を成す。座標(x,y)に対し，$z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ $(i=\sqrt{-1})$ とおいた時の

$$z\longmapsto f(z),\ \bar{z}\longmapsto g(\bar{z})\qquad (f,g \text{ は } z=0,\bar{z}=0 \text{ で正則},\ f(0)=g(0)=0)$$

の全体 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}\{z\})\times\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}\{\bar{z}\})$ がその群である。以下，CFTの代数的扱いのみを問題とするので，形式的カテゴリーで話を進める。($\mathbb{C}\{z\}$を$\mathbb{C}[[z]]$で置き換える。) 正則，反正則の別は，物理学者の言う左巻き，右巻きに対応する。超弦理論で一番期待されるheterotic string 等のmodelでは，正則(反正則)の片方のみを扱うchiralな理論を通常考えて，最後に両者を組合せる。そこで，以下正則な部分のみ扱う。

さて，CFTでは上記の(chiralな)群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[[z]])$ より大きな対称性を考える。即ち，Lie環 $\mathrm{Lie\,Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}\mathbb{C}[[z]]=\mathbb{C}[[z]]z\frac{d}{dz}$ を部分Lie環として含む

$$\mathbb{C}((z))\frac{d}{dz}\quad\text{or}\quad\mathbb{C}[z,z^{-1}]\frac{d}{dz}\qquad(\mathbb{C}((z)):=\mathbb{C}[[z]][z^{-1}])$$

なる無限次元Lie環を考える。これらは定数倍を除き唯一つの１次元中心拡大をもつ：

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathbb{C}((z))\frac{d}{dz} \oplus \mathbb{C}\cdot c \quad \text{or} \quad \mathcal{L} = \mathbb{C}[z, z^{-1}]\frac{d}{dz} \oplus \mathbb{C}\cdot c \quad (\text{"Virasoro代数"})$$

$L_n = -z^{n+1}\frac{d}{dz}$ $(n \in \mathbb{Z})$ および c が通常文献で見られる $\mathcal{L}$ の基底を与える。$\mathcal{L}$ の表現を考えた時，中心の元 c の固有値を central charge，L_0 の固有値を conformal anomaly と言う。

1.2　一つのCFTの定義としては次が考えられる：

"CFTの一つの model とは，Virasoro代数 $\mathcal{L}$ を含む chiral algebra と呼ばれる(結合的)代数の(無限個乃至有限個の)表現の族のこと。"

ここで言う表現とは，Virasoro代数又は affine Lie環の highest weight 表現を念頭に置いて考えている。highest weight vector が真空(vacuum)又は primary field に対応する。

以上が，Belavin-Polyakov-Zamolodchikov 1984 の定式化である。彼らは，$0 \leq c < 1$ なる central charge をもつ Virasoro代数の minimal表現を特に調べ，その場合の多点相関関数の満たす微分方程式を導出した。

又，Virasoro代数の highest weight 表現の分類が特に重要なことは言うまでもない。(contravariant form が正定値になるという意味で) unitary な表現の分類は，Friedan-Qiu-Shenker 1985, Goddard-Kent-Olive 1985 により完成された。

CFTはもともと弦理論の中心的だが一つの側面であって，その観点からすると上のBPZの結果は，相関関数を loop のない (=genus 0の) 場合に考えたものに相当する。任意個数の loop (BPZ.

任意のgenus)も考えに入れたCFTの場の相関関数を考える為の枠組は，Friedan-Shenker 1986によって与えられた。これが本小論の表題にあるmodular geometryである。

1.3　Modular geometry of CFT

Polyakov 1981以来，(超)弦理論の経路積分をコンパクトRiemann面のmoduli空間上の積分として解釈する方法により，弦模型の確率振幅及至相関関数はmoduli空間上の"関数"として把えられるべきである。

Friedan-Shenker 1986は次のように提唱した：

chiral CFTの多点相関関数ϕはmoduli空間(又はその変種(variant))上のhermitian vector bundleのsectionであって，(twisted) integrable connection ∇に関しhorizontalであり(i.e. $\nabla\phi=0$)，次のfactorization propertyを満たす。

N個の(primary) fields $\Phi_1,\cdots,\Phi_N$が与えられた時そのN点相関関数のg loopsの成分は，genus gのRiemann面C及びC上のN点$P_1,\cdots,P_N$に対して，$\phi=\langle\Phi_1(P_1)\cdots\Phi_N(P_N)\rangle_{g,C}$と定まる。N点付きコンパクトRiemann面のmoduli空間を$\mathcal{M}_{g,N}:=\{(C,P_1,\cdots,P_N)\}$とするとき，$\phi:(C,P_1,\cdots,P_N)\mapsto\langle\Phi_1(P_1)\cdots\Phi_N(P_N)\rangle_{g,C}$は$\mathcal{M}_{g,N}$上のsectionであり，その自然なコンパクト化，即ち，N点付き安定代数曲線/$\mathbb{C}$のmoduli空間$\overline{\mathcal{M}_{g,N}}$の境界$\overline{\mathcal{M}_{g,N}}-\mathcal{M}_{g,N}$まで延長できて，よりgenusの低い場の多点相関関数で表わすことができる。("factorization property")

更に，恒等作用素に対応する"trivial"な表現を挿入しても相関関数が不変であるという"真空の伝播"の原理が成立つべきである。

1.4 Modular geometry の例

1.3の意味での modular geometry が詳細に展開されているのは，Tsuchiya-Ueno-Yamada 1989 だけである。TUY は任意の affine Lie環に対応する Wess-Zumino model を扱っている。Feigin は Virasoro代数の minimal 表現について同様の結果を announce している。Hitchin も WZ model の場合を扱おうとしているらしいが，完成しているかどうか著書は知らない。

- WZ model (TUY 1989)

この model は，(有限次限)単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ と"level"と呼ばれる自然数 ℓ を与えると定まる。

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((t)) \oplus \mathbb{C}\cdot K$$

$$\hat{\mathfrak{g}}_N = \bigoplus_{j=1}^{N} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_j)) \oplus \mathbb{C}\cdot K$$

を $\mathfrak{g}$ の affine 化とする。$\hat{\mathfrak{g}}$ の level ℓ の integrable 表現は，ℓ-restricted dominant integral weights と一対一に対応する。

L_{λ_i} を weight λ_i $(1 \le i \le N)$ に対応する integrable 表現とする。この時，$L_{\vec{\lambda}} := L_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes L_{\lambda_N}$ $(\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N))$ は自然に $\hat{\mathfrak{g}}_N$ の表現となる。又，$\mathfrak{X} = (C; P_1, \cdots, P_N; \eta_1, \cdots, \eta_N)$ を N点 $P_1, \cdots, P_N$ と各 P_i での 1-form η_i 付きの stable curve C とする。

TUYでは，$\vec{\lambda}$と$\mathfrak{X}$に対して有限次元$\mathbb{C}$-vector space $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$及びその dual $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$が構成された。$\mathfrak{X}$に関して$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$は正則に依存し，"$\overline{\mathcal{M}}^{(1)}_{g,N} := \{\mathfrak{X}$の全体$\}$"上の vector bundle $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$が得られる。(正確には$\overline{\mathcal{M}}^{(1)}_{g,N}$を algebraic stack として扱う。解析的には stable curve の local universal family に対して考察することと同値。)

$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$上には，Ward-Takahashi identity を利用して (twisted) integrable connection が定義できて，$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$は locally free となる。

実は$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$を構成する為には，$\overline{\mathcal{M}}^{(1)}_{g,N}$上の無限次元 fiber space $\overline{\mathcal{M}}^{(\infty)}_{g,N}$なる空間から出発する必要がある。$\overline{\mathcal{M}}^{(\infty)}_{g,N}$上では，

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) := L_{\vec{\lambda}}/\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})L_{\vec{\lambda}}, \quad \hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) := \mathrm{Im}\left(\mathfrak{g}\otimes H^0(C-\{P_1,\dots,P_N\},\mathcal{O}) \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}}_N\right)$$

と定義し，$\overline{\mathcal{M}}^{(1)}_{g,N}$へ descend する。

この$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$上の connection は，$g=0$ の時は有明な Knizhnik-Zamolodchikov 方程式になる。$g=1$ の場合，0点関数(=分配関数)を$\overline{\mathcal{M}}_1$の境界$\overline{\mathcal{M}}_1 - \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{0,3} = \{pt\}$で見ることによって，その空間の basis として，(level ℓ の) integrable 表現の指標全体がとれることが分る。(これは factorization property より従う。) $\mathfrak{g} = sl(2,\mathbb{C})$ の場合は，Eguchi-Ooguri の結果を cover する。

1.5　その他，その後の展開について

(1)　Virasoro代数の $c=1$, $h=0$ の Fock表現に付随した free fermion field の CFT を，modular geometry として扱う話は，物理側では Ishibashi-Matsuo-Ooguri 1987, Verlinde-Verlinde 1987, Alvarez-Gaumé-Gomez-Reina

1987, AlvarezGaumé-Bost-Moore-Nelson-Vafa 1987, Witten 1988, etc によって,数学側では, Kawamoto-Namikawa-Tsuchiya-Yamada 1988, Arbarello-DeConcini-Kac-Procesi 1988 によって扱われた。これらの仕事は, Fock表現をboson表示を用いて, KP方程式系のて関数と結びつけるものである。これらの基礎には, Beilinson-Manin-Schechtman, Kontsevich等のideaがある。(cf. [5])

(2) factorization property により, CFTの相関関数の計算は原理的にすべてgenus 0の話に帰着できる筈だが, それを実際にgenus 0から組立ててみる試みが, Moore-Seiberg 1989 である。彼らがpolynomial equation と呼ぶ関係式は, quantum Yang-Baxter equationの話に関連して出てくるquasi-tensor category の条件と見なせる(braiding行列, fusing行列等の間の)五角形や六角形の関係式である。

(3) その後の重要なtopicsは, KZ方程式の解の積分表示の仕事, BRST charge の導入と quantum Hamiltonian reduction である。cf. Felder 1989, Bernard-Felder 1989, Bershadsky-Ooguri 1989, Feigin-Frenkel 1989, 1990, Date-Jimbo-Matsuo-Miwa 1990, Matsuo 1990, Kuroki 1990 etc.

§2　2D gravity : Matrix model

2.0　2次元重力が広く注目を集めるようになったのは, 1989年秋以降のことである。ほぼ同時に Brézin-Kazakov, Douglas-Shenker, Gross-Migdal の3つのグループが one-matrix model の分配関数を計算し, KdV 方程式を満たすことを示したのが契機であった。彼らの結果は n-matrix model に拡張されている。その後, Witten は topological QFT の立場から matrix model の結果を解釈しようと試み, その比較を基に 1-matrix model の分配関数と(複素)代数曲線の moduli 空間の交点数とが関係している, と予想した。1-matrix model と topological gravity (pure gravity) との同値性は物理的には(?)示されているようであるが, 厳密な数学的証明は今のところないようである。n-matrix model と matter field に couple した topological gravity の場合にも予想は立てられており, この場合は更に, W_n-algebra が関与する。

以下では Gross-Migdal 1990, Witten 1990 に従って, §2 で matrix model を, §3 で topological gravity, 特に moduli 空間の交叉理論に関連した Witten の予想を紹介する。

2.1　(one-) matrix model とは何かは, 2.3 以後で説明するとして, 最初に one-matrix model による主要結果を紹介しておこう。

one-matrix model (の double scaling limit 後) の分配関数 $Z(x)$ は, 変数 x ("宇宙定数") の関数で, string equation という微分方程式により

決まる。

$$F := -\log Z \qquad (\text{"free energy"})$$

$$u(x) := -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 F(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \log Z(x) \qquad (\text{"specific heat"})$$

とおく。 u は puncture operator の 2点関数 $\langle PP \rangle$ と同定される。(cf. 3.)

one-matrix model の critical index γ_0 が $-\frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ なる値をとる時，この model は gravity に $(p,q)=(2,2k-1)$ の Virasoro 代数の minimal 表現 ($(2,2k-1)$-minimal model という) が couple したものと考えられていて， k番目の critical point では string equation は

$$c_k R_k[u] = x \qquad \left(c_k = (-1)^{k+1} 2\, \Gamma(\tfrac{1}{2}) \Gamma(k+1) / \Gamma(k+\tfrac{1}{2}) \right)$$

となる。 $R_k[u] = R_k(u, u', u'', \cdots)$ は Gel'fand-Dikii の変数 u に関する微分多項式であり，KdV hierarchy に現われる。 $R_k[u]$ は次の recursion relation で定まる：

$$\frac{\partial}{\partial x} R_{k+1}[u] = \frac{1}{4} R_k''' - u R_k' - \frac{1}{2} u' R_k$$

$$R_0 = 1, \quad R_1 = -\frac{1}{4} u, \quad R_2 = \frac{1}{16}(3u^2 - u''), \ \cdots .$$

異なる multi-critical point を結びつけることが，scaling operators σ_n (及び対応する coupling constant t_n) $(n \geq 1)$ を導入することにより，可能となる。 σ_n を挿入することが，n番目の KdV flow を引き起こす： $\tilde{R}_k[u] = c_k R_k[u]$ とおいて，

$$\langle \sigma_n PP \rangle = \frac{\partial u}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{R}_{n+1}[u] \qquad (n\text{-th KdV equation})$$

そして一般の string equation は，

$$u = x + \sum_{n=1}^{\infty} n t_n \tilde{R}_n[u]$$

となる。

2.2　上で見た通り，one-matrix model は KdV hierarchy と大いに関係がある。実は，

$$Z(t_0, t_1, t_2, \cdots) = \tau(t_0, t_1, \cdots)^2 \qquad (t_0 = x)$$

とおくと，τ は KdV hierarchy の τ 関数となる，即ち，$u = 2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \log \tau$ が 2.1 の KdV flow の方程式 $\frac{\partial u}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{R}_{n+1}[u]$ を満たす。

又，L_{-1} を次の微分作用素とするとき，string equation は "$L_{-1}\tau = 0$" という形になる：（但し，$t_1 + 1$ を改めて t_1 とおいた）

$$L_{-1} := \sum_{m=1}^{\infty} m t_m \frac{\partial}{\partial t_{m-1}} + \frac{1}{2} t_0^2$$

より一般に，

$$L_0 := \sum_{m=0}^{\infty} m t_m \frac{\partial}{\partial t_m} + \frac{1}{4}$$

$$L_n := \sum_{m=0}^{\infty} m t_m \frac{\partial}{\partial t_{m+n}} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t_{m-1}\partial t_{n-m}}$$

とおくとき，

$$L_n \tau = 0 \qquad (n \geq -1)$$

が成立つことが知られている。

2.3　次に，(one-) matrix model とは何か，を説明する為に物理側での説明を Witten 1990, §4 に従って与えておく。(cf. [K])

物理側では次の一種の"経路積分"を求めることが問題となる。

$$F(g) = \int_{\mathrm{Met}_g} (Dh) \exp\left(-\lambda_1 \int_\Sigma \sqrt{h} - \lambda_2 \int_\Sigma \sqrt{h}\frac{R}{2\pi}\right) \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$$

ここで，Σは種数gの２次元閉曲面，hはΣ上のRiemann計量，Rは曲率，$\sqrt{h}=\sqrt{\det(h)}$である。残るはDhだが，これはΣ上の計量の空間上の"測度"を指す。この"積分"の意味付けの一方法として，計量の代りに，Σの多角形への分割を考えようというのが，matrix modelの元々の考えである。

Σの表面積Aが一定になる計量の全体$\mathrm{Met}_{g,A}$を考えると，

$$F(g)=\int F(g,A)\,dA$$

$$F(g,A)=\int_{\mathrm{Met}_{g,A}}(Dh)\exp(-\lambda_1 A-\lambda_2(2-2g))$$

$$=\mathrm{Vol}(g,A)\cdot\exp(-\lambda_1 A-\lambda_2(2-2g))$$

となり，$\mathrm{Met}_{g,A}$の"体積"$\mathrm{Vol}(g,A)$をどう求めるかが問題となる。さて，Σの四角形への分割が一つ与えられた時，すべての四角形が一定の面積ϵをもつと指定して，Σの計量のdiscreteな近似を与えたと考えることができる。

$W(g,n)$をn個の四角形によるΣの分割の仕方の個数とする。（２つの分割が同値なのは，それらのdual graphが同値な時である。）すると，$A=n\epsilon$ゆえ$\mathrm{Vol}(g,A)$の"近似"$\mathrm{Vol}_\epsilon(g,A)$として，$\frac{1}{\epsilon}W(g,n)$をとることができて，$F(g)$の近似$F_\epsilon(g)$は

$$F_\epsilon(g)=\sum_{n=\frac{A}{\epsilon}}\mathrm{Vol}_\epsilon(g,A)\exp(-\lambda_1 A-\lambda_2(2-2g))$$

$$=\sum_n\frac{1}{\epsilon}W(g,n)\exp(-\lambda_1\epsilon n-\lambda_2(2-2g))$$

で与えられる。

この$W(g,n)$を計算する方法として編み出されたのが，

t'Hooftによる random matrix の方法である。それによると，次の(formal な)関係式が成立つ。

$$Z(N,\lambda):=\int(dM)\exp\left(-\mathrm{tr}\left[\frac{M^2}{2}-\frac{\lambda M^4}{4n}\right]\right)$$

$$F(N,\lambda)=\log Z(N,\lambda)=\sum_{g=0}^{\infty}N^{2-2g}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n W(g,n)$$

ここで，M は size N×N のエルミート行列の空間の元を走る。

近似のやり方には，4角形のみならず，2角形，6角形等も混ぜて $W(g,n)$ の類似を考えることもできる。重要なことは，多角形の総数を n とするとき，(genericには) $n\to\infty$ での振舞いは，基本的には4角形のみの場合と同値である，という事実である。

m 角形には，$\mathrm{tr}\,M^m/mN^{m/2-1}$ を対応させる規則で，一般には

$$Z(\lambda_2,\lambda_4,\cdots)=\int(dM)\exp\left(-\mathrm{tr}\left\{\lambda_2\frac{M^2}{2}+\lambda_4\frac{M^4}{4N}+\lambda_6\frac{M^6}{6N^2}+\cdots\right\}\right)$$

を考える。そこで，$V(s)$ を s の多項式として，

$$Z(\beta)=Z(\lambda,\beta)=\int(dM)\exp(-\beta\,\mathrm{tr}\,V(M))$$

とおき，以下この形の積分を調べる。(注：$V(s)$ が偶多項式であることは，本質的には不要だが，簡単の為には仮定する) パラメータ β は λ に吸収してもよいが，後で scaling limit をとる際に用いる為，分離しておく。

2.4　N×N エルミート行列 M は，$U(N)$ の元で対角化して，dM に関する積分は本質的に M の固有値 $(s_1,\cdots,s_N)$ に関する積分に帰着する：

$$dM=\mathrm{const}\times dU\cdot ds_1\cdots ds_N\cdot\prod_{i<j}(s_i-s_j)$$

(dU は $U(N)$ 上の Haar 測度。)

$\mathbb{R}$ 上の測度 $e^{-\beta V(s)}ds$ に関する直交多項式 $P_k(s)$ $(k=0,1,2,\cdots)$

を用いると，簡単な計算で

$$Z = \text{const.}\times\int_{-\infty}^{\infty} ds_1\cdots ds_N \prod_{i<j}(s_i-s_j)^2 \prod_{i=1}^{N} e^{-\beta V(s_i)}$$
$$= \text{const.}\times N!\, h_0\cdots h_{N-1}$$

となる。ここで，$\int ds\cdot e^{-\beta V(s)} P_k(s) P_\ell(s) = h_k \delta_{k,\ell}$ とおいた．又，$\{P_k(s)\}$ の間には recursion relation： $sP_n(s) = P_{n+1}(s) + S_n P_n(s) + R_n P_{n-1}(s)$，$(S_n, R_n \in \mathbb{C})$ が成立ち，これより $h_{n+1} = R_{n+1} h_n$ が得られる。これから，$h_0\cdots h_{N-1} = h_0^N \prod_{i=1}^{N-1} R_i^{N-i}$ ゆえ，R_i を求めることが目標となる。R_n についての方程式としては，次の関係式が単純な計算で成立する。

$$\begin{cases} \int ds\cdot e^{-\beta V(s)} \mathcal{P}_{n-1}(s) V'(s) \mathcal{P}_n(s) = \dfrac{n}{\beta\sqrt{R_n}} \\ \int ds\cdot e^{-\beta V(s)} \mathcal{P}_n(s) V'(s) \mathcal{P}_n(s) = 0 \end{cases} \qquad \left(\mathcal{P}_k(s) = \frac{P_k(s)}{\sqrt{h_k}}\right)$$

これが以下で string equation を生み出す元となる。

2.5　Double scaling limit

2.4 の話はすべての N について成立つ。そこで $N\to\infty$ として生残るものを抽出したい。任意の多項式 $V(s)$ に対する $Z_N(\beta) = Z(\lambda, \beta)$ は，2.3 で述べたように，$1/N$ についての展開をもつ：

$$\log Z_N(\beta) \sim \beta^{2(1-g)}\left(\frac{\beta}{N}-1\right)^{(2-\gamma_0)(1-g)} \qquad (\gamma_0 = \text{critical index})$$

そこで，$\left[\beta^2\left(\frac{\beta}{N}-1\right)^{2-\gamma_0}\right]^{-1}$ (= string coupling constant) を固定したまま，$N\to\infty$，$\frac{\beta}{N}\to 1$ という limit がとれる。

まずは，$N\to\infty$ なる limit で考える。この時，$\frac{n}{\beta}\to t$ が連続変数となり，$\langle f, g\rangle = \int ds\cdot e^{-\beta V(s)} f(s) g(s)$ を内積とする1変数多項式の空間は，多項式の掛算が作用素と見なせる。又，この極限における $|n\rangle = \mathcal{P}_n(s)$，

R_n を $|t\rangle$, $R(t)$ と記す。このとき，2.4 の最後の式は，

$$\langle t|V'(2-\hat{H})|t\rangle = \beta t, \quad \hat{H} = -\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1 - R(t)$$

と書き換えられる。ここで，$V'(2-\hat{H})$ は，$V'(s)$ の s に $2-\hat{H}$ を代入したもの。

2.6　k-th multicritical model の場合は potential $V(s)$ が次の形の時に相当する：$V(s) = B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-k)(2-s)^{k+\frac{1}{2}} + B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-k)(2+s)^{k+\frac{1}{2}}$.

又，独立及び従属変数を変換する：$t = 1 - x\beta^{-\frac{2k}{2k+1}}$, $R(t) = 1 - u(x)\beta^{-\frac{2}{2k+1}}$.

すると，$R(t)$ についての上の関係式は，$u(x)$ についての次の方程式となる：

$$x = -2\nu B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}-\nu)\langle x|(-(\tfrac{d}{dx})^2 + u(x))^{\nu-\frac{1}{2}}|x\rangle$$

(ν を k まで解析接続する) これを解くには，Gel'fand-Dikii の作用素の分数巾の計算を用いる：$H = -(\frac{d}{dx})^2 + u(x)$ に対し，作用素 $(\xi + H)^{-1}$ の核関数 (= H の resolvent) を $R(x, x'; \xi)$ とするとき，

$$\langle x|H^{\nu-\frac{1}{2}}|x\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint R(x, x; \xi)\,\xi^{\nu-\frac{1}{2}}\,d\xi$$

この $R(x, x; \xi)$ と，2.1 の $R_k[u]$ とは次の式で結びついている：

$$R(x, x; \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l[u]\,\xi^{-l-\frac{1}{2}}$$

最後に $\nu = k$ へと持っていくと，string equation $x = c_k R_k[u]$ が得られる。$k=2$ の場合，

$$x = u^2 - \frac{1}{3}u'' \quad \text{or} \quad u'' = 3(u^2 - x)$$

を得る。右の形は Painlevé I 型の方程式であり，これを基に specific heat u の解析的性質が調べられる。

§3 2D gravity : topological gravity

3.0 Wittenによる topological quantum field theory (TQFT)の考え方を2D gravityに応用することは，やはりWittenによって始められた。TQFTでは，理論に付随する"instanton"の moduli 空間 $\overset{(\text{次元 } d \text{ の})}{\mathcal{M}}$ が与えられる。場の作用素 $\mathcal{O}_i$ には $\mathcal{M}$ の（余次元 d_i の）subvariety H_i が対応し，いわゆる selection rule $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$ が満たされる時，$\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_n$ の相関関数は，

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle = \#(H_1 \cap \cdots \cap H_n)$$

（$H_1, \cdots, H_n$ の交点数）として"定義される。" $\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle$ に背景空間の点の位置が入って来ないところが，topological FT であるところの所以である。

又，実際にこのような理論の Lagrangian を構成するための手法を Witten は与えている。即ち，$Q^2 = 0$ なる作用素 Q を導入して，Q 不変な Lagrangian を構成せよ，という。

2D gravity の場合には，$\mathcal{M}$ は コンパクト Riemann 面 Σ と Σ から固定した背景空間 N への正則写像 f との組 (Σ, f) の全体のなす moduli 空間である。特に one-matrix model（又は pure gravity）に対応する場合は，$\mathcal{M}$ は コンパクト Riemann 面の moduli 空間となる。

pure gravity の場の作用素としては，（genus について安定化した）$\mathcal{M}$ の cohomology ring の元が対応し，相関関数の値は，（Riemann 面の）標準束からつくられる交点数となる（解釈される）。

topological gravity と matrix model の同値性は，一応物理側

では示されたということになっているらしい。数学的には，後に紹介するWittenの予想が関係する。

ここでは触れることはできないが，最近注目を浴びているのがK.Liが始めた N=2 superconformal model を，minimal model と couple した topological gravity の model として考える，という話である。それは，singularity の unfolding の理論と密接に関係しているようである。

3.1　最初に topological な approach から分配関数の一つの定義の motivation を与えておく。

Lagrangian $\mathcal{L}_0$ と operators τ_n (2.1 の σ_n の $\frac{1}{n!}$ 倍を想定) が与えられた時，より一般の次の Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \sum_{i\geq 0} t_i \int_\Sigma \tau_i \quad , \quad \left(\begin{array}{l} \Sigma\text{; genus } g \text{ の Riemann面} \\ t_0, t_1, t_2, \cdots \text{; coupling constants} \end{array} \right)$$

を考える。すると この時の分配関数は，

$$F(t) = \sum_{g=0}^{\infty} F_g(t)\ ,\ F_g(t) = \int_{\overline{M_g}} e^{-\mathcal{L}} = \int_{\overline{M_g}} e^{-\mathcal{L}_0} \cdot e^{\sum t_i \int_\Sigma \tau_i}$$

ここで，形式的に $\exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} t_i \int_\Sigma \tau_i\right) = \sum_{\{n_i\}} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t_i^{n_i}}{n_i!} \left(\int_\Sigma \tau_i\right)^{n_i}$ と展開して，再び F_g の式に代入すると，

$$F_g(t) = \sum_{\{n_i\}} \int_{\overline{M_g}} e^{-\mathcal{L}_0} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t_i^{n_i}}{n_i!} \left(\int_\Sigma \tau_i\right)^{n_i} = \sum_{\{n_i\}} \frac{t_i^{n_i}}{n_i!} \int_{\overline{M_{g,n}}} e^{-\mathcal{L}_0} \tau_0^{n_0} \tau_1^{n_1} \cdots$$

$(n = \sum n_i)$ となる。ここで $\overline{M_{g,n}}$ は n 点付き stable curve/$\mathbb{C}$ の moduli 空間である ($\overline{M_g} = \overline{M_{g,0}}$)。従って，$F(t)$ は次で与えられる：

$$F(t) = \sum_{\{n_i\}} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t_i^{n_i}}{n_i!} \sum_{g=0}^{\infty} \langle \tau_0^{n_0} \tau_1^{n_1} \cdots \rangle_g$$

和の内身の $\langle \tau_0^{n_0} \tau_1^{n_1} \cdots \rangle_g$ は $3g-3 = \sum_i (i-1) n_i$ の時以外は 0 である。

次に $\langle \tau_0^{n_0} \tau_1^{n_1} \cdots \rangle$ をどのように与えるか，に移ろう。

3.2 $\overline{M_{g,n}}$ は，n点付きの stable curve の moduli 空間であったから，universal family $Z_{g,n} \xrightarrow{\pi} \overline{M_{g,n}}$ が存在する。$\overline{M_{g,n}} \ni C$ 上の fiber が curve C 自身であるようになっている。π には，n 個の自然な sections x_i $(1 \le i \le n)$ が在る。$K_{C/M}$ を relative dualizing sheaf $\omega_{Z_{g,n}/\overline{M_{g,n}}}$ とする。

$$\mathcal{L}_{(i)} := x_i^* K_{C/M} \qquad (\text{on } \overline{M_{g,n}})$$

は $\overline{M_{g,n}}$ 上の可逆層で 1^{st} Chern 類 $c_1(\mathcal{L}_{(i)}) \in CH^1(\overline{M_{g,n}})_{\mathbb{Q}}$ を定める。ここで CH^k は（余次元 k の cycle の）Chow 群を表わし，$(\ )_{\mathbb{Q}} = (\ ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ である。

この時，

$$\langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \cdots \tau_{d_n} \rangle := \langle \bigcup_{i=1}^{n} c_1(\mathcal{L}_{(i)})^{d_i}, \overline{M_{g,n}} \rangle$$

とおく。右辺は(cup)積をとった $CH^{\sum d_i}(\overline{M_{g,n}})_{\mathbb{Q}}$ の元を，fundamental class $\overline{M_{g,n}}$ で evaluate したものであり，$\sum_{i=1}^{n} d_i = 3g-3+n$ 以外は 0 である。

この交点数を計算する為に，$\overline{M_{g,n}}$ の交叉理論を用いようとすると，次の Mumford, Morita により考えられた class を用いることになる：$n=1$ の場合の $\mathcal{L}_{(1)}$ を $\mathcal{L}$ と略記して，

$$K_n := \pi_*(c_1(\mathcal{L})^{n+1}) \quad \text{on } \overline{M_g} \qquad (n \geq 0), \quad K_{-1} := 0$$

とおく。すると，次のような recursive relation が成立ち，

$$\langle \tau_d \rangle = \langle K_{d-1} \rangle, \quad \langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \rangle = \langle K_{d_1-1} K_{d_2-1} \rangle + \langle K_{d_1+d_2-2} \rangle$$

$$\langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \tau_{d_3} \rangle = \langle K_{d_1-1} K_{d_2-1} K_{d_3-1} \rangle + \langle K_{d_1+d_2-2} K_{d_3-1} \rangle$$
$$+ \langle K_{d_2+d_3-2} K_{d_1-1} \rangle + \langle K_{d_3+d_1-2} K_{d_2-1} \rangle + 2 \langle K_{d_1+d_2+d_3-3} \rangle$$

g が小さい (i.e. 1, 2, 3) 時は，$CH^*(\overline{M_g})_{\mathbb{Q}}$ の構造は実際に計算されていて (Mumford, Faber)，$\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle$ の値を求めることができて，後の

Wittenの予想を実際に確めることができる。又，$\overline{M}_g$ 及び M_g の Chow ring や cohomology ring の $g\to\infty$ での構造については，いろいろと知られていて，例えば大体 $CH^*(\overline{M}_g)_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}[\kappa_1,\kappa_2,\cdots]$ と予想されている。

一つ注意しておくと，以上の話はすべて正当化できるが，その為には，algebraic stack の交叉理論が必要である。M_g, $\overline{M}_g$, $Z_{g,n}$ 等すべて algebraic stacks であって，その構成はそれほど簡単ではない。必要な道具は，少なくとも $\mathbb{Q}$ 係数では，Gillet 1984, Vistoli 1989 によって整備されている。

3.3 Witten の予想

2D gravity に関する話題で特に面白いものの一つが次の予想である。まず，$F(t)$ を 3.1 で与えた形式巾級数とする。但し，係数には 3.2 で定義した交点数を用いる。

Conjecture (Witten 1990)　$F(t)$ は次の2種類の方程式を満たす。

(KdV 方程式)　$U := \left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^2 F$ とおくとき，

$$\frac{\partial U}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial t_0} R_{n+1}[U]$$

(string equation)

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = \frac{1}{2}t_0^2 + \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1}\frac{\partial F}{\partial t_i}$$

ここでいくつか注意すべき事がある。

(1)　R_n は本質的には，2.1 の Gel'fand-Dikii の微分多項式である。正規化に若干くい違いがある：　$R_1 = U$

$$n \geq 1, \qquad \frac{\partial R_{n+1}}{\partial t_0} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{\partial U}{\partial t_0}R_n + 2U\frac{\partial R_n}{\partial t_0} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^3 R_n\right)$$

(2) string equation に $\frac{\partial}{\partial t_0}$ を施して，KdV方程式を用いれば，

$$U = t_0 + \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1} R_{i+1}[U]$$

となる。従って，変数 t_n は 2.1 とは 定数倍だけずれている。ちなみに，この形の式を string equation と呼ぶこともある。

(3) Conjecture の2方程式を満たす形式巾級数は唯一であることが証明できる。matrix model の free energy $F = -\log Z$ は ((1),(2)で触れたずれを除き) 上の2つの条件を満たすから，Conjecture が正しければ，matrix model と pure gravity の分配関数は等しいこととなり，すべての相関関数は等しく，2つの理論は全く等価であることになる。

3.4 string equation を巾級数の係数の間の関係式と思って書いてみると，

$$\langle \tau_0 \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i - \delta_{i,j}} \rangle + \delta_{n,2}\, \delta_{d_1,0}\, \delta_{d_2,0}$$

となる。これは，次の lemma より実際に証明できる：

<u>lemma</u> $\mathcal{L}_{(j)} = \pi^* \mathcal{L}'_{(j)} \otimes \mathcal{O}(D_j)$

ここで，$\pi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ は，$n+1$ 番目の点 $\underbrace{}^{x_{n+1}}$ を忘れる morphism，D_j は，$\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ の境界の成分で，x_{n+1} と x_j が rational curve 上にあり，それが他の成分と node でつながっているところを表わす。

F の形式巾級数としての定義から，

$$\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_{d_i}} F(t) \Big|_{t=0}$$

である。従って，τ_d を挿入することは，$\frac{\partial}{\partial t_d}$ を施すことに対応する。これにより，$\langle\!\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle\!\rangle = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_{d_i}} F(t)$ とおくとき，$U = (\frac{\partial}{\partial t_0})^2 F = \langle\!\langle \tau_0^2 \rangle\!\rangle$，$\frac{\partial U}{\partial t_n} = \langle\!\langle \tau_n \tau_0^2 \rangle\!\rangle = \frac{\partial}{\partial t_0} \langle\!\langle \tau_n \tau_0 \rangle\!\rangle$ 等が成立つから，KdV方程式を $\{\langle\!\langle \tau_n \tau_0 \rangle\!\rangle\}_{n=0,1,2,\cdots}$ の間の recursion relations

に書き直すことができる。

KdV方程式自体は証明できていないが，string equationに類似の式が示せるとか，$g=0,1,2,3$の時は，確められる等，Conjectureを支持する結果はいろいろとある。

3.∞　予定のページ数を既に超過しているので，この辺で終わることにする。

この記事の表題で，1月の数理研での研究集会で話をさせていただいた。CFTの基礎となる概念をざっと振り返り，最近の2次元重力の話題を紹介し，両者を結びつけるのが，KdV及至KP系の理論である，と話を進めたかったのだが，2次元重力におけるKdV方程式の登場の仕方を表面的に触れるのみで終わってしまった。大それた題をつけたと反省している。ここで紹介したのは1年ほど前までの展開である。その後，singularityのunfoldingの話と結びついたN=2 superconformal modelの話，重力のτ関数をGrassmann上で特徴づける話，等々いろいろと進展のあることが分った。ともかく，Wittenの予想の代数幾何的に明瞭な解決を望んで，筆を置くことにする。

References

（関連する文献は膨大なのでここでは中心的なものを挙げるにとどめる。）

- §1 -

A.M.Polyakov 1981, Quantum geometry of bosonic strings, Nucl.Phys.B103, 207-

A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.B.Zamolodchikov 1984, Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. B241, 333-380

D. Friedan, S.Shenker 1986, Analytic geometry of 2D CFT, Nucl.Phys.B281 ('87) 509-

D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, 1985, Conformal invariance, unitarity and two dimensional critical exponents, MSRI Publ. 3 (1985) 419-449.

P. Goddard, A. Kent, D. Olive 1985, Virasoro algebra and coset space models, Phys. Lett. B 152 (1985) 88-92.

A. Tsuchiya, K. Ueno, Y. Yamada 1989, CFT on universal family of stable curves with gauge symmetries, Adv. Stud. in Pure Math. 19 (1989) 459-566.

G. Moore, N. Seiberg 1989, Classical and quantum CFT, Commun. Math. Phys. 123, 177-254.

1.5 (1) に関しては、

[K] 清水勇二, Algebro-geometric aspects of CFT, 解析および代数多様体上の諸問題(研究集会)報告集,(1988年1月於都立大)

1.5 (3) に関しては、次のIntroduction参照

G. Kuroki 1990, Fock space representations of affine Lie algebras and integral representations in the Wess-Zumino-Witten models, preprint

- §2 -

D. Gross, A. Migdal 1989, A non-perturbative treatment of 2D quantum gravity, Nucl. Phys. B 340 (1990) 333-365.

M. Douglas, S. Shenker, Nucl. Phys. B 335 (1990) 635-654,

E. Brézin, V. Kazakov, Phys. Lett. B 236 (1990) 144-150.

[K] 川合光, 魅力ある2次元重力 -量子重力の最近の発展- パリティ Vol. 6. No. 1 (1991)

- §3 -

E. Witten 1990, 2D gravity and intersection theory on moduli spaces, preprint

E. Witten, Nucl. Phys. B 340 (1990) 281-332.

R.Dijkgraaf, E.Witten, Nucl. Phys. B 342 (1990) 486-522

より最近のものでは,

G. Moore, Geometry of the string equations, Commun. Math. Phys. 133 (1990) 261-304.

R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, Topological strings in $d<1$, Nucl. Phys. B 352 (1991) 59-86.